

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ
муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников
2025-2026 учебный год
по МАТЕМАТИКЕ

На олимпиаде используется 7-балльная шкала: каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных участником. Основные принципы оценивания приведены в таблице:

Баллы	Критерии оценивания
7	Полное верное решение.
6	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
4–5	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений. В задаче «Оценка + пример» доказана оценка.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи. В задаче «Оценка + пример» построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Кроме того,

- 1) результатом выполнения каждого задания должна быть запись полного решения со всеми необходимыми обоснованиями и выводами; ответ без обоснований (если они требуются) оценивается в 0 баллов;
- 2) любое правильное (полное) решение оценивается в 7 баллов; недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты;
- 3) олимпиадная работа не является контрольной работой, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;
- 4) баллы не выставляются «за старание участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи;
- 5) если к задаче приведены указания к оцениванию – они имеют приоритет над общими указаниями.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ
муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников
2025-2026 учебный год

по МАТЕМАТИКЕ
7 класс

1. В записи некоторого натурального числа цифру 0 поменяли на 5, а одну из цифр 2 — на 7. При делении нового числа на 37 в частном получилось 203, а в остатке 15. Найдите первоначальное число.

Ответ: 2026.

Решение. Обратный ход. Пусть загаданное число x , тогда $x = 37 \times 203 + 15 = 7526$. 7 и 5 восстанавливаем однозначно, получаем 2026.

Ответ без объяснений – 1 балл.

Показано, что пример числа работает – 7 баллов.

2. Несколько школьников написали контрольную, и каждый получил за неё оценку: 2, 3, 4 или 5. Оказалось, что ровно половина школьников получила оценки 2 и 3, а получивших двойки ровно в пятеро меньше, чем получивших пятёрки. Кроме того, сумма всех чётных полученных оценок равна сумме всех нечётных полученных оценок. Каких оценок было получено больше: пятёрок или четвёрок, и во сколько раз?

Ответ: Четвёрок больше в 7 раз.

Решение. Пусть было a двоек, b троек, c четвёрок и d пятёрок. Тогда из условия имеем уравнения: $a + b = c + d$, $5a = d$, $2a + 4c = 3b + 5d$.

Складывая утроенное первое уравнение с третьим, получим $5a + 3b + 4c = 3c + 3b + 8d$, то есть $5a + c = 8d$, $d + c = 8d$, $c = 7d$.

Ответ без объяснений – 1 балл.

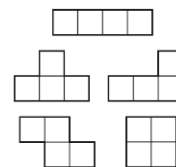
3. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и CE . Оказалось, что $2\angle AEC = \angle ADC$. Чему может быть равен угол BAC ?

Ответ: 120° .

Решение. Обозначим углы треугольника: $\angle CAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCA = \gamma$.

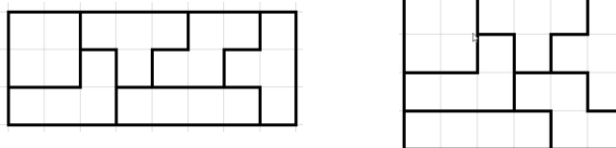
Из условия имеем $2\beta + \gamma = 2\angle AEC = \angle ADC = \alpha/2 + \beta$. То есть $180^\circ - \alpha = \beta + \gamma = \alpha/2$, и $\alpha = 120^\circ$.

4. Прямоугольник какой наименьшей площади можно разрезать на тетрамино без остатка так, чтобы присутствовали фигурки тетрамино всех видов? Всего бывает 5 видов тетрамино (см. рисунок).



Оценка. Ясно, что площадь делится на 4 и не меньше 20. Если площадь равна 20, то каждая фигурка ровно одна. Пусть мы смогли какой-то прямоугольник площади 20 разбить на 5 различных тетрамино. Покрасим его в шахматную раскраску. Очевидно, что чёрных и белых клеток в нём поровну. Во всех тетрамино, кроме Т-тетрамино, чёрных и белых клеток по 2, а в Т-тетрамино их не поровну. Противоречие. Значит, площадь хотя бы 24 (и нужно использовать две Т-тетрамино).

Пример.



Только пример 3 балла.

Только оценка 4 балла.

5. Простое число p назовём *стандартным*, если существуют различные натуральные числа $(1 < a, b < \frac{p}{2})$ такие, что $ab - 2$ делится на p . Докажите, что существует лишь конечное число простых нестандартных чисел.

Решение. Докажем, что все простые $p > 11$ являются стандартными.

Если p дает остаток 1 при делении на 3, то

$$p + 2 = \frac{p + 2}{3} \cdot 3.$$

При этом $\frac{p+2}{3} < \frac{p}{2}$, поэтому достаточно взять $a = \frac{p+2}{3}$, $b = 3$.

Если же p дает остаток 2 при делении на 3, то

$$2p + 2 = \frac{p + 1}{3} \cdot 6.$$

Тогда можно взять $a = \frac{p+1}{3}$, $b = 6$

Утверждение, что все $p > 11$ – стандартные – 1 балл.

Разобран только один случай остатка 1 или 2 при делении на 3 – 3 балла.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ
муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников
2025-2026 учебный год

по МАТЕМАТИКЕ
8 класс

1. Максим загадал четырёхзначное число. Если к числу прибавить его первую слева цифру, то получится на 9 больше, чем если прибавить его вторую цифру. А если к числу прибавить третью цифру, то получится на 8 больше, чем если прибавить четвёртую цифру. Какое число мог загадать Максим? Не забудьте указать все варианты и объяснить, что других нет.

Ответ: 9080 или 9091.

Решение. Заметим, что первая и вторая цифра должны отличаться на 9, такими цифрами могут быть только 9 и 0. А третья и четвёртая цифра — отличаются на 8, так может быть только для пары 8 и 0 или 9 и 1. Из всего вышесказанного получаем ответы 9080 и 9091.

Только один ответ – 1 балл

Только два ответа – 2 балла

Верное обоснование, но только один из двух ответов – 5 баллов.

2. Числа a и b таковы, что

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} = 1.$$

Чему может быть равно

$$\frac{a}{2a+2} + \frac{b}{2b+2} ?$$

Ответ: только $\frac{1}{2}$.

Решение. Заметим, что

$$\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} = 1 - \frac{1}{a+1} + 1 - \frac{1}{b+1} = 1.$$

Искомое выражение же в два раза меньше.

3. Сколькими способами в равенстве $\star\star + \star\star = 17\star$ можно заменить звёздочки цифрами так, чтобы оно было верным и все семь цифр были различными?

Решение: Рассмотрим разные варианты первых цифр двузначных слагаемых.

1. $8\star + 9\star = 17\star$ или $9\star + 8\star = 17\star$. Тогда одна из звёздочек равна сумме двух других. Значит, 0 использовать не получится, остались цифры 2, 3, 4, 5, 6. Из них можно составить только два нужных равенства: $2 + 3 = 5$ и $2 + 4 = 6$. Каждую пару цифр (2, 3)

и (2, 4) можно подставить в исходное равенство двумя способами, поэтому в данном случае получаем $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ способов.

2. Варианты, когда первые цифры равны 7 и 9 или 8 и 8, противоречат условию.
3. Первые цифры дают в сумме не больше 15. Тогда сумма этих двузначных чисел меньше 170.

Продвижение про сумму первых цифр числа, без дальнейшего продвижения – 3 балла (про 8 и 9, и сумму меньше 17)

4. В трапеции $ABCD$ основание BC вдвое меньше боковой стороны AB . Биссектрисы углов A и B пересекаются в точке E . Докажите, что треугольник BCE — равнобедренный.

Решение (1). Заметим, что $\angle BAD + \angle ABC = 180^\circ$, тогда для их половин выполняется равенство $\angle BAE + \angle ABE = 90^\circ$. Пусть M — середина AB , $CB = BM = MA$, тогда треугольники CBE и MBE равны по двум сторонам и углу между ними. Заметим, что $ME = MB$ как медиана прямоугольного треугольника.

Решение (2). Пусть биссектриса AE пересекает прямую BC в точке F . Так как $\angle FAB = \angle FAD = \angle AFB$, то треугольник FAB — равнобедренный. В треугольнике ABF биссектриса BE будет медианой и высотой. Так как $2BC = AB = BF$, то $BC = CF$, а $CE = CF$ как медиана прямоугольного треугольника ABF (или как средняя линия треугольника ABF).

Решение (3). Пусть биссектриса BE пересекает сторону AD в точке G . Так как $\angle ABG = \angle BGA = \angle AGB$, то треугольник AGB равнобедренный, биссектриса AE является его медианой. Отметим точку M — середину отрезка AB . Далее скажем, что треугольники CBE и MBE равны и равнобедренные.

5. Паша хочет разместить n клетчатых полосок на доске 1×100 . Полоски должны располагаться по клеточкам и не могут вылезать за пределы доски. Длины всех n полосок должны быть различны. Полоски могут частично перекрываться, но ни одна не может полностью содержать другую. При каком наибольшем n такое возможно?

Решение:

Пример. Пронумеруем клетки слева направо от 1 до 100, а полосу от a до b будем обозначать $[a, b]$. Пример $[1, 2], [2, 4], \dots, [50, 100]$ (то есть полосы вида $[i, 2i]$, где $1 \leq i \leq 50$), очевидно, удовлетворяет условиям задачи.

Оценка. Пусть полосок больше 50. Рассмотрим наибольшую по длине полосу $[a, b]$, её длина как минимум 51. У каждой из оставшихся полосок либо левый конец находится в клетке $a_1 < a$, либо правый конец находится в клетке $b_1 > b$. Поскольку $b - a \geq 51$, то таких клеток не более 48. Значит, у каких-то двух из оставшихся полосок общий правый или общий левый конец, но тогда большая из них содержит меньшую, противоречие.

Оценка – 5 балла

Пример – 2 балла

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ
муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников
2025-2026 учебный год

по МАТЕМАТИКЕ
9 класс

1. У Ирины есть 100 карточек с натуральными числами от 1 до 100. На каждой карточке написано по одному числу, все они различны. Как ей выложить их друг за другом таким образом, чтобы многозначное число, которое можно прочесть слева направо, было максимальным? Переворачивать карточки нельзя.

Ответ. 99 9 98 97 96 95 94 93 92 91 90 89 88 8 ... 20 19 ... 12 11 1 10 100.

Решение. Понятно, что первым должно идти число 99, а за ним — 9 (или наоборот). После этого числа 98, 97, ..., 90, 89 на каждом шаге — это максимально возможные числа с наибольшей первой цифрой. Затем аналогично должны идти числа 88 и 8 (или снова наоборот). После этого числа 87, 86, ..., 80, 79, 78 на каждом шаге — это максимально возможные числа с наибольшей первой цифрой. Продолжая рассуждать аналогично, мы дойдём до чисел 20, 19, ..., 12, 11 и 1. На последнем шаге мы должны выбрать между числами 10 и 100. Но $10100 > 10010$, так что получается ответ.

Ошибка в последнем 10100 и 10010 – минус 2 балла.

2. На плоскости проведены девять прямых, они образовали 21 точку пересечения. В 19 из этих точек пересекаются две прямые, в одной — четыре, в одной — пять. Были ли среди прямых параллельные?

Ответ: Да, были.

Решение. Посчитаем количество пар пересекающихся прямых: $19 \cdot 1 + 1 \cdot C_2^4 + 1 \cdot C_2^5 = 35$. Если бы не было параллельных, то любые две прямые пересекались, точек пересечения было бы $C_2^9 = 36$.

Только ответ – да, можно – 0 баллов.

3. Какое наибольшее количество клеток можно отметить в прямоугольнике 9×8 так, чтобы никакие две отмеченные клетки не были соседними по стороне, а также не соприкасались друг с другом левым верхним и правым нижним углами?

	1	2	0	1	2	0	1	2
1								
2								
0								
1								
2								
0								
1								
2								
0								

Решение:

Оценка. Разобьём фигуру на прямоугольники 3×2 (2 столбца, 3 строки), всего 12 прямоугольника. Если в одном столбце

прямоугольника отмечено две клетки, то это обязательно верхняя и нижняя, но тогда другой столбец пуст. В противном случае в каждом столбце не более одной отмеченной клетки. Таким образом, в каждом прямоугольнике не более двух отмеченных клеток, поэтому всего отмечено не более 24 клеток.

Пример. Пронумеруем строки снизу вверх и слева направо числами от 1 до 8 и 9. В качестве примера подойдут клетки, у которых номера строки и столбца дают одинаковые остатки при делении на 3. Таких клеток ровно треть от общего числа, то есть 24.

Только пример – 3 балла. (обосновывать пример не обязательно)

Только оценка – 4 балла.

4. На столе лежат 20 карточек, на которых написаны числа $-9, -8, \dots, -1, 0, 1, \dots, 9, 10$. Каждый минуту производится следующая операция. Выбираются несколько карточек, сумма чисел на которых равна общему количеству карточек в данный момент, а затем выбранные карточки удаляются со стола, а числа на оставшихся карточках увеличивают на 1. Могло ли так произойти, что через некоторое количество шагов на столе останется ровно 1 карточка?

Решение: будем следить за суммой чисел на карточках. Пусть на очередном шаге было удалено k карточек, а осталось s карточек. Тогда после удаления сумма уменьшилась ровно на $s + k$, а затем увеличилась на s . То есть в итоге сумма уменьшилась на k . Предположим, что в конце осталась одна карточка. Тогда было удалено 19 карточек, а значит, итоговое число на оставшейся карточке должно быть равно

$$-9 - 8 - \dots - 1 + 0 + 1 + \dots + 9 + 10 - 19 = -9.$$

Но такое число могло получиться только из карточки с исходным числом -9 , если не было проведено ни одного удаления, что невозможно. Следовательно, одна карточка в конце остаться не может.

Продвижение 3 балла – установлено, что за каждый ход полуинвариант на $-k$ от общей суммы чисел.

5. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC , в котором $\angle B = 60^\circ$. Биссектриса угла AIC пересекает AC в точке L . Точка O — центр описанной окружности треугольника BIL . Докажите, что середина отрезка OI лежит на прямой AC .

Решение. Пусть точка I' симметрична точке I относительно прямой AC . Отразим точку I относительно I' и получим точку T . Поскольку $\angle B = 60^\circ$, то $BI = 2r = II' = I'T$. Кроме того, $IL = LI'$ и счётом углов несложно понять, что $\angle BIL = \angle LI'T$. Тогда треугольники BIL и $T'I'I$ равны, откуда $\angle LTI' = \angle LBI$. Значит, точка T лежит на описанной окружности треугольника BIL , а её центр O — на серединном перпендикуляре к IT . Итого, $\angle LI'O = 90^\circ$. Остаётся заметить, что $AC \parallel OI'$ и проходит через середину II' , а, значит, и через середину OI .

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ
муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников
2025-2026 учебный год

по МАТЕМАТИКЕ
10 класс

1. Может ли так случиться, что число $a(b + c)$ оканчивается на 1, число $b + ac$ оканчивается на 2, число $c(a + b)$ оканчивается на 3 при некоторых натуральных a, b, c ?

Ответ: Не может. *Решение.* Из первого условия следует, что числа a и $b + c$ нечётны, а из третьего условия — что нечётны числа c и $a + b$. Тогда число b чётно, а число $b + ac$ — нечётно, поэтому оно не оканчивается на 2.

2. У Пети есть белая клетчатая доска 2025×2025 . За один ход Петя выбирает линию (строку или столбец), в которой в данный момент все клетки белые, и перекрашивает какие-то 1000 клеток этой линии в чёрный. Какое наибольшее количество клеток Петя может в результате сделать чёрными?

Ответ: $1000 \cdot 2025 + 1025 \cdot 1000 = 3050000$.

Решение.

Оценка. Будем говорить, что Петя сделал ход в линию, если он закрасил 1000 клеток из этой линии. Очевидно, в каждую линию можно сделать ход не более одного раза. Пусть, не умаляя общности, в первый свой ход Кирилл сделал ход в столбец. Тогда Кирилл уже не сможет сделать ход в 1000 линий (которые содержат перекрашенные клетки первого хода). Следовательно, всего перекрашено будет не более $1000 \cdot 2025 + 1025 \cdot 1000 = 3050000$ клеток.

Пример. Делаем ход во все столбцы, закрашивая каждый раз 1000 верхних клеток, затем делаем ход в 1024 нижних строк, закрашивая в них любые клетки.

Пример — 3б

Оценка — 4б

3. Точка M — середина боковой стороны AB , а точка N — середина боковой стороны BC равнобедренного треугольника ABC . Точка D на отрезке AM выбрана так, что $\angle CND = 90^\circ$. Луч CD пересекает прямую MN в точке E . Точка F отмечена на отрезке CN таким образом, что $BF = CE$. Докажите, что из отрезков DE, DF и MN можно сложить треугольник.

Решение. Отметим на луче ME такую точку G , что $MG = EN$. Заметим, что $\angle GMB = \angle ENC$ и $MG = NC$. Тогда по первому признаку равны треугольники GMB и ENC . Из этого следует, что $\angle DCF = \angle DBG$. Из равнобедренности треугольника BDC (в нём медиана совпадает с высотой) следует, что $\angle DCF = \angle DBF$. Следовательно, треугольники DBG и

DBF равны по двум сторонам и углу между ними. Таким образом, равны отрезки GD и DF . Осталось заметить, что $GE = GM = EN - EM = MN$. Мы получили треугольник GED , стороны которого равны нужным отрезкам.

4. Найдите все натуральные n , при которых $11^n - 1$ делится на $10^n - 1$.

Ответ: \emptyset (таких n нет).

Решение. Предположим, что $10^n - 1 \mid 11^n - 1$. Так как $10 \equiv 1 \pmod{3}$, то $3 \mid 10^n - 1$, а значит $3 \mid 11^n - 1$. Но $11 \equiv 2 \pmod{3}$, поэтому $2^n \equiv 1 \pmod{3}$, откуда n чётное.

Теперь рассмотрим сравнения по модулю 11. Имеем $10 \equiv -1 \pmod{11}$, поэтому при чётном n : $10^n - 1 \equiv (-1)^n - 1 \equiv 0 \pmod{11}$ то есть $11 \mid (10^n - 1)$. Из делимости $10^n - 1 \mid 11^n - 1$ следовало бы, что $11 \mid (11^n - 1)$, но на самом деле: $11^n - 1 \equiv 0 - 1 = -1 \not\equiv 0 \pmod{11}$ Противоречие. Следовательно, таких натуральных n не существует.

Доказано, что n – четное. Продвижение 3 балла.

5. Лёша и Саша играют в крестики-нолики на бесконечной клетчатой доске. За свой ход Лёша ставит два крестика, а Саша — три нолика. Задача Лёши — собрать L-пентамино из крестиков (уголок из 5 клеток) в любой ориентации. Может ли Саша ему помешать?

Ответ: выигрывает Лёша.

Решение.

Ход 1. Лёша ставит два крестика очень далеко друг от друга (скажем, на расстоянии 100 и по оси x , и по оси y). Для каждого из поставленных крестиков X рассмотрим прямоугольник 5×3 , в котором X — центральная нижняя клетка. Эти два прямоугольника можно выбрать четырьмя способами каждый и оба выбранных прямоугольника не пересекаются. За свой ход Саша ставит три нолика.

Ход 2. По принципу Дирихле хотя бы в одной из окрестностей крестика будет не более одного нолика. Обозначим этот крестик как X^* . Вокруг X^* есть четыре возможных продолжения до прямоугольника 5×3 (вверх, вниз, влево, вправо). Хотя бы одно из этих направлений будет свободно от ноликов. Лёша дополняет X^* до полосы 1×3 в этом свободном направлении.

После хода Лёши у нас есть прямоугольник 5×3 с полоской 1×3 внутри и без ноликов.

Ход Саши. Теперь вокруг готовой полоски 1×3 существует четыре способа немедленно завершить «уголок из 5 клеток»: у каждого из двух концов полоски можно достроить перпендикулярное «плечо» из двух клеток налево или направо, всего перекрытых таких из них четыре варианта, но менее четырёх клеток. Имея только 3 нолика за ход, он может заблокировать не более трёх вариантов.

Ход 3. Лёша ставит два крестика в оставшиеся свободные две клетки и завершает уголок.

Следовательно, при описанной стратегии Лёша побеждает.

Если приведенная стратегия в решении не работает хотя бы для одного из случаев – 0 баллов.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ
муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников
2025-2026 учебный год

по МАТЕМАТИКЕ
11 класс

1. Сумма чисел x, y и z (не обязательно целых) равна 1. Докажите, что произведение чисел $x + yz, y + zx$ и $z + xy$ неотрицательно.

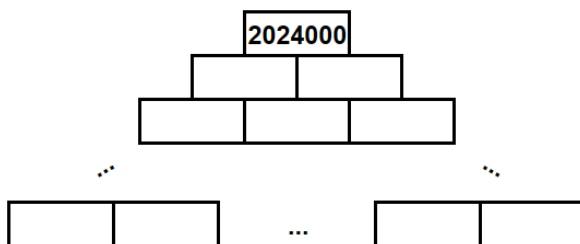
Решение. Заметим, что $x + yz = (1 - y - z) + yz = (1 - y)(1 - z)$. Аналогичное равенство верно для других двух выражений. Следовательно, произведение равняется $(1 - x)^2(1 - y)^2(1 - z)^2$, что неотрицательно.

2. Сколькими способами в таблицу 2×3 (2 строки, 3 столбца) можно расставить числа от 1 до 6, каждое по одному разу, так, чтобы произведения чисел в строчках отличались в 5 раз?

Ответ: 144.

Решение. Если мы перемножим оба произведения, то получим произведение всех чисел от 1 до 6, то есть 720. Если разделить этот результат на 5, то получится меньшее из произведений, умноженное само на себя. Так как $720/5 = 144 = 12 \cdot 12$, то меньшее произведение равно 12, а большее — 60. Ясно, что цифра 5 содержится в большем произведении, так что нам нужно выяснить, как можно оставшиеся пять чисел разбить на две группы по два и три числа с произведениями 12. Легко видеть, что группа из двух чисел может быть только (6, 2) или (4, 3). Итого, у нас есть два способа выбрать разбиение шести чисел на две тройки, в каждой тройке можно переставить числа $6 = 3 \cdot 2 \cdot 1$ способами, а потом есть два способа выбрать, какая тройка в какую из двух строк будет записана. Следовательно, ответ в задаче $2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 = 144$.

3. На каждом из 10 кирпичей, лежащих в основании пирамиды (см. картинку), написано натуральное число. На каждом из остальных кирпичей записано произведение двух чисел в кирпичах, на которых он лежит. В самом верхнем кирпиче написано 2024000. Сколько кирпичей с нечётными числами может быть в этой пирамиде?



Ответ. 36 или 45.

Решение. Если в основании есть кирпич с чётным числом и не лежащий с краю, то двойка в разложении до кирпича-вершины может идти хотя бы 9 способами. При этом в разложении числа 2024000 всего 7 двоек, что слишком мало. Тогда наши кирпичи с двойками в основании могут стоять только с одного или двух краёв (какие-то должны быть, раз в вершине чётное число). Но тогда соответствующие стороны будут полностью состоять из чётных чисел. Если это обе стороны, то будет $8 + 7 + \dots + 1 = 36$ нечётных чисел. В примере можно в угловые кирпичи основания вписать 2024 и 1000, а в остальные на основании — 1. Если только одна сторона, то $9 + 8 + \dots + 1 = 45$ нечётных чисел. Пример состоит из 2024000 и девяти 1.

Доказан случай 36 и 45 и есть примеры – 7б.

Только один из случаев с примером – 4б.

Только один из случаев без примера – 2б.

4. Найдите все такие пары простых чисел p и q , что $p^{q-1} + q^{p-1}$ — точный квадрат.

Ответ: $(p, q) = (2, 2)$.

Решение.

1. Оба простых нечётные. Тогда $q - 1$ и $p - 1$ чётные, а потому $p^{q-1} \equiv q^{p-1} \equiv 1 \pmod{4}$, и их сумма $\equiv 2 \pmod{4}$, что не бывает квадратом. Противоречие.
2. Ровно одно из p, q равно 2. Пусть $p = 2$, а $q \geq 3$ нечётное. Тогда требуется, чтобы $2^{q-1} + q$ было квадратом. Но 2^{q-1} — точный квадрат (так как $q - 1$ чётно), и следующий за ним квадрат равен

$$(2^{(q-1)/2} + 1)^2 = 2^{q-1} + 2^{(q+1)/2} + 1$$

Для всякого $q \geq 3$ имеем $0 < q < 2^{(q+1)/2} + 1$ (при $q = 3$ правая часть уже $5 > 3$, далее только растёт). Значит

$$2^{q-1} < 2^{q-1} + q < 2^{q-1} + 2^{(q+1)/2} + 1 = (2^{(q-1)/2} + 1)^2$$

и число $2^{q-1} + q$ лежит строго между двумя соседними квадратами, следовательно, квадратом быть не может. Случай $q = 2, p$ нечётно, разбирается симметрично.

3. $(p, q) = (2, 2)$. Даёт $2^1 + 2^1 = 4 = 2^2$. Других пар нет.

Правильный ответ: 1 балл.

Разбор случая обоих нечётных простых: 3 балла.

Разбор случая ровно одного из простых равного 2: 3 балла.

5. В остроугольном треугольнике ABC проведена медиана AM . На луче AB отмечена такая точка D , что $\angle ADM = \angle ACM$, а на луче AC — такая точка E , что $\angle AEM = \angle ABM$. Описанные окружности треугольников ACD и ABE пересекаются в точках A и S . Докажите, что $AS \parallel BC$.

Решение (1). Пусть $AB > AC$. Тогда ясно, что точка D лежит на отрезке AB , а точка E — на продолжении отрезка AC за точку C . Заметим, что

$$\angle CME = \angle ACM - \angle CEM = \angle ADM - \angle DBM = \angle DMB.$$

Тогда точки D, M и E лежат на одной прямой. Более того, $\angle DBC = \angle DEC$ и, следовательно, четырехугольник $BDCE$ вписанный. Так как $BM = MC$, то CD не параллельно BE . Пусть $CD \cap BE = I$. Заметим, что I — радикальный центр окружностей, описанных вокруг треугольников ADC, ABE и четырехугольника $BDCE$. Поэтому прямая AS проходит через точку I . С другой стороны, по теореме Чевы для треугольника EBC и чевиан BA, CI и EM , пересекающихся в точке D , имеем $EA/AC \cdot CM/MB \cdot BI/IE = 1$. То есть, $EA/AC = EI/IB$ и прямые AI и BC параллельны.

Решение (2). На серединном перпендикуляре к BC рассмотрим такую точку K , что $KC \perp AC$. Пусть D' — основание перпендикуляра из точки K на AB . Заметим, что точки A, C, K, D' лежат на окружности с диаметром AK . А также, точки B, M, K, D' лежат на окружности с диаметром BK . Тогда $\angle(AC, KC) = \angle(AD', KD') = \angle(KD', AD')$ и $\angle(MC, KC) = \angle(KB, MB) = \angle(KD', MD')$. Вычитая, получаем, что $\angle(AC, CM) = \angle(MD', AD')$, то есть, $\angle ACM = \angle D'M$. Таким образом $D' = D$ и центр описанной окружности треугольника ACD — середина отрезка AK . Аналогичным образом доказывается, что если точка L на серединном перпендикуляре к BC такова, что $LB \perp AB$, то центр описанной окружности треугольника ABE — середина отрезка AL . Из этого следует, что линия центров этих двух окружностей является средней линией треугольника AKL , а, значит, перпендикулярна BC , что и означает, что $AS \parallel BC$.